Quang học tinh thể (Nhóm I dịch từ sách Principles of Optics của Max Born, trang 790, các công thức viết theo hệ đơn vị CGS)

15.1 Tenxơ điện môi của môi trường bất đẳng hướng

Cần nhớ rằng lí thuyết quang học của chúng ta dựa trên hai c ơ sở riêng biệt; một mặt là các phương trình Maxwell:

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{1}$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}} = 0, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{4}$$

mặt khác là các phương trình vật liệu trong môi trường đẳng hướng theo các công thức:

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}, \tag{9}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \tag{10}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \tag{11}$$

Khi xét tinh thể, chúng ta phải tổng quát hóa những ph ương trình sau này để tính đến tính chất bất đẳng hướng. Trong phần lớn chương này chúng ta giả sử rằng môi trường là đồng nhất, không dẫn điện ($\sigma = 0$) và đẳng hướng về mặt từ tính, nhưng cho phép bất đẳng hướng về mặt điện, nghĩa là chúng ta xét những chất mà kích thích điện của chúng phụ thuộc vào hướng của điện trường. Nói chung, vecto ***D*** sẽ không còn cùng hướng với vecto ***E*** nữa. Trong công thức (10) ở trên, chúng ta giả sử rằng hệ thức giữa ***D*** và ***E*** có dạng đơn giản nhất có tính đến tính bất đẳng hướng, cụ thể là hệ thức mà ở trong đó mỗi thành phần của ***D*** quan hệ tuyến tính với các thành phần của ***E***:

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z, \\ D_y &= \varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z, \\ D_z &= \varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Chín đại lượng $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \ldots$ là các hằng số của môi trường, và tạo thành tenxơ điện môi; do đó vectơ ***D*** là tích của tenxơ này với ***E***.

Chúng ta sẽ viết (1) dưới dạng ngắn hơn là

$$D_k = \sum_l \varepsilon_{kl} E_l, \tag{2}$$

ở đây *k* đại diện cho một trong ba chỉ số *x*, *y* và *z*, và *l* đại diện lần lượt cho mỗi *x*, *y* và *z* trong tổng. Dấu tổng có thể được bỏ đi trong kí hiệu tenxơ thông thường, sự xuất hiện chỉ số *l* ở hai nơi trong tổng được hiểu như là một sự chỉ dẫn để lấy tổng trên tất cả các *l*. Tuy nhiên, chúng ta sẽ giữ lại dấu tổng, vì điều này sẽ giúp tránh được bất cứ sự nhầm lẫn nào cho người đọc không quen thuộc với phép tính tenxơ.

Biểu thức (31) trong bài 1.1 để tính để tính mật độ năng lượng điện từ vẫn có thể áp dụng được trong trường hợp này; vì thế

$$w_e = \frac{1}{8\pi}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} = \frac{1}{8\pi}\sum_{kl} E_k \varepsilon_{kl} E_l. \tag{3}$$

và

$$w_m = \frac{1}{8\pi}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} = \frac{1}{8\pi}\mu H^2. \tag{4}$$

Chúng ta cũng giữ lại định nghĩa (38) trong bài (1.1) về vecto Pointing, hoặc 'vectơ tia'

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) \tag{5}$$

và xét xem nguyên lí này có phù hợp với định luật bảo toàn năng lượng hay không.

Chúng ta có, như trong bài 1.1.4, bằng cách nhân phương trình Maxwell đầu tiên với ***E*** và phương trình thứ hai với ***H*** và dùng đồng nhất thức vecto (27) trong bài 1.1,

$$-c\,\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H}\cdot\dot{\mathbf{B}}$$

$$= \sum_{kl} E_k \varepsilon_{kl} \dot{E}_l + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu H^2). \qquad (6)$$

Nếu chúng ta chia cả hai vế của phương trình này cho 4π , số hạng thứ hai ở vế phải biểu diễn tốc độ thay đổi của năng lượng từ trên một đơn vị thể tích, số hạng đầu tiên sẽ biểu diễn tốc độ thay đổi của mật độ năng lượng điện nếu như:

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{kl} E_k \varepsilon_{kl} \dot{E}_l = \frac{\mathrm{d}w_e}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{8\pi}\sum_{kl} \varepsilon_{kl}(E_k \dot{E}_l + E_l \dot{E}_k) \qquad (7)$$

Nghĩa là, nếu như

$$\sum_{kl} \varepsilon_{kl}(E_k \dot{E}_l - \dot{E}_k E_l) = 0.$$

k và l là các chỉ số câm; cả hai đều chạy trên các giá trị (x, y, z). Vì thế biểu thức không thay đổi nếu chúng ta hoán đổi giữa k và l trong số hạng thứ hai. Điều này dẫn đến

$$\sum_{kl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{lk}) E_{kl} = 0.$$

Vì phương trình này phải đúng đối với bất kì giá trị nào của trường, nên suy ra

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}. \qquad (8)$$

Điều này có nghĩa là tensor điện môi phải đối xứng; nó chỉ có 6 thành phần độc lập chứ không phải 9. Ngược lại, điều kiện (8) đủ để đảm bảo tính hợp lệ của (7), và chúng ta thu được định lí năng lượng dưới dạng vi phân

$$-\mathrm{div}\,\mathbf{S} = \frac{\partial w}{\partial t}, \qquad (w = w_e + w_m). \qquad (9)$$

Sự đối xứng của tensor ε làm cho có thể rút gọn biểu thức của năng lượng điện w_e thành một dạng trong đó chỉ có các thành phần bình phương của trường, chứ không phải tích của chúng. Xét trong không gian x, y, z bề mặt bậc hai

$$\varepsilon_{xx}x^2 + \varepsilon_{yy}y^2 + \varepsilon_{zz}z^2 + 2\varepsilon_{yz}yz + 2\varepsilon_{xx}xz + 2\varepsilon_{xy}xy = \text{constant}. \qquad (10)$$

Vế trái của (10) phải là dạng toàn phương xác định dương, bởi vì nếu x, y, z được thay thế bởi các thành phần của ***E*** biểu thức phải bằng $8\pi w_e$ và năng lượng w_e phải là dương đối với bất kì giá trị nào của vecto trường. Do đó (10) biểu diễn một ellipsoid. Ellipsoid có thể luôn luôn được chuyển sang trục chính của nó vì thế tồn tại một hệ tọa độ thích hợp trong tinh thể sao cho phương trình của ellipsoid là

$$\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 = \text{constant}. \tag{11}$$

Trong hệ tọa độ *trục điện môi chính* này các phương trình vật liệu và biểu thức của năng lượng điện có dạng đơn giản

$$D_x = \varepsilon_x E_x, \qquad D_y = \varepsilon_y E_y, \qquad D_z = \varepsilon_z E_z, \tag{12}$$

$$w_e = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon_x E_x^2 + \varepsilon_y E_y^2 + \varepsilon_z E_z^2)$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left(\frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z}\right). \tag{13}$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ được gọi là hằng số điện môi chính (hoặc *cơ bản chính tắc*). Từ các công thức này có thể ngay lập tức thấy rằng ***D*** và ***E*** sẽ có hướng khác nhau, nếu ***E*** không trùng với hướng của một trong những trục chính, hoặc tất cả các hằng số điện môi chính bằng nhau; trong trường hợp sau $(\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z)$ ellipsoid suy biến thành một hình cầu.

Một chú ý phải được thêm vào ở đây là ảnh hưởng của sự tán sắc. Cũng như trong trường hợp của môi trường đẳng hướng, hằng số điện môi không phải là hằng số của vật liệu mà phụ thuộc vào tần số, vì vậy trong môi trường bất đẳng hướng sáu thành phần ε_{kl} của tensor điện môi cũng sẽ biến đổi theo tần số. Kết quả là không chỉ giá trị của các hằng số điện môi chính $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ sẽ biến đổi mà các hướng của trục chính cũng biến đổi. Hiện tượng này được gọi là *sự tán sắc của các trục*. Tuy nhiên, hiện tượng này chỉ có thể nảy sinh trong tinh thể mà ở đó đối xứng của cấu trúc không xác định bộ ba hướng trực giao ưu tiên, nghĩa là nó chỉ có thể được quan sát trong hệ đơn tà và tam tà.

Nếu chúng ta tự hạn chế sóng phẳng đơn sắc chúng ta có thể không cần để ý đến tán sắc: thì đại lượng ε_{kl} chỉ phụ thuộc vào môi trường.

15.2 Cấu trúc sóng phẳng đơn sắc trong môi trường bất đẳng hướng

15.2.1 Vận tốc pha và vận tốc tia

Trong một sóng phẳng đơn sắc tần số góc $\omega = 2\pi\upsilon$ được truyền với vận tốc *c/n* theo hướng của vecto truyền sóng **s,** các vecto ***E***, ***D***, ***H*** và ***B*** ở dưới dạng số phức tỉ lệ với $\exp\{i\omega[(n/c)(\vec{r}.\vec{s}) - t]\}$. Như đã đề cập đến một lần rồi cùng với vận tốc pha *c/n*, sau này chúng ta sẽ đưa vào vận tốc tia (năng lượng), bởi vì, như chúng ta sẽ thấy, trong môi trường bất đẳng hướng nói chung năng lượng được truyền với một vận tốc khác và theo hướng khác với hướng truyền sóng.

Trong một trường dao động như thế, đạo hàm $\partial/\partial t$ của một hàm nào đó luôn luôn tương đương với việc nhân hàm đó với lượng $-i\omega$, trong khi đạo hàm $\partial/\partial x$ của một hàm tương đương với việc nhân hàm đó với một lượng $-i\omega n s_x / c$. Đặc biệt,

$$\dot{\mathbf{E}} = -\mathrm{i}\omega\mathbf{E}, \qquad \operatorname{curl}\mathbf{E} = \mathrm{i}\omega\frac{n}{c}\mathbf{s}\times\mathbf{E}. \tag{1}$$

$$(Curl\vec{E} = \nabla\times\vec{E})$$

Phương trình Maxwell đối với vùng không có dòng điện là

$$\operatorname{curl}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}} = 0, \qquad \operatorname{curl}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}} = 0, \tag{2}$$

trở thành

$$n\mathbf{s}\times\mathbf{H} = -\mathbf{D}, \qquad n\mathbf{s}\times\mathbf{E} = \mu\mathbf{H}, \tag{3}$$

ở đây hệ thức $\vec{B} = \mu\vec{H}$ được sử dụng. Khử ***H*** trong (3) và dùng một hệ thức vecto quen thuộc, chúng ta thu được

$$\mathbf{D} = -\frac{n^2}{\mu}\mathbf{s}\times(\mathbf{s}\times\mathbf{E}) = \frac{n^2}{\mu}[\mathbf{E} - \mathbf{s}(\mathbf{s}\cdot\mathbf{E})] = \frac{n^2}{\mu}\mathbf{E}_\perp, \tag{4}$$

ở đây $\vec{E}_\perp$ biểu thị các thành phần vecto của ***E*** vuông góc với ***s*** trong mặt phẳng của ***E*** và ***s*** (xem hình 15.1).

Từ (3) chúng ta thấy rằng vector ***H*** (và vì thế vector ***B***) vuông góc với ***E***, ***D*** và ***s***, vì thế chúng phải đồng phẳng. Hơn nữa ***D*** vuông góc với ***s***. Vì thế ***H*** và ***D*** là ngang đối với hướng truyền ***s***, nhưng ***E*** thì không. Hình 15.1 biểu diễn hướng tương đối của các vector này, và thêm vào đó vector đơn vị theo hướng vector tia ***S*** được kí hiệu là ***t*** , nó vuông góc với ***E*** và ***H***. Góc giữ ***E*** và ***D*** bằng góc giữa ***s*** và ***t***, và sẽ được kí hiệu bằng α. Chúng ta thấy rằng ***D***, ***H*** và ***s***, ở một phía, và ***E***, ***H*** và ***t***, ở phía bên kia, hình thành các bộ ba vector trực giao, với vector chung ***H***, quay tương đối với cái kia qua góc α. Một kết luận quan trọng là trong tinh thể năng lượng không được truyền theo hướng của vector truyền sóng.

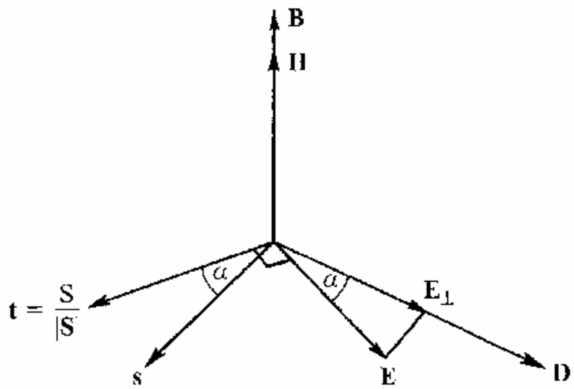

Fig. 15.1 Directions of the wave normal, of the field vectors and of the energy flow in an electrically anisotropic medium.

Mặt khác, định lí mật độ năng lượng điện và từ bằng nhau vẫn còn giữ nguyên tính hiệu lực của nó. Từ (3) suy ra

$$\left.\begin{aligned} w_e &= \frac{1}{8\pi}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} = -\frac{n}{8\pi}\mathbf{E}\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{H}), \\ w_m &= \frac{1}{8\pi}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} = \quad \frac{n}{8\pi}(\mathbf{s}\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{H}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Và bằng tính chất quen thuộc của tích bộ ba vô hướng vế phải của những phương trình này bằng nhau. Hơn nữa, cả hai chúng đều bằng $n(\vec{E}\times\vec{H}).\vec{s}/8\pi$ vì thế mật độ năng lượng toàn phần $w = w_e + w_m$ bằng

$$w = \frac{n}{c}\mathbf{S}\cdot\mathbf{s}. \tag{6}$$

Chúng ta phải phân biệt giữa vận tốc pha và vận tốc truyền năng lượng. Cái đầu, vận tốc pha, có hướng là vector đơn vị ***s*** và độ lớn của nó là

$$v_p = \frac{c}{n}. \tag{7}$$

Cái sau, vận tốc tia, có hướng là hướng của vector Pointing **S**, nghĩa là theo hướng của vector đơn vị ***t***. Độ lớn của nó υ_r bằng năng lượng truyền qua diện tích vuông góc với hướng chảy của dòng năng lượng trong một đơn vị thời gian, chia cho năng lượng trên một đơn vị thể tích. Theo định lí năng lượng bài 15.1 (9) điều này được viết là

$$\upsilon_r = \frac{S}{w}. \tag{8}$$

Từ (6), (7), (8)

$$\upsilon_p = \upsilon_r \mathbf{t}\cdot\mathbf{s} = \upsilon_r \cos\alpha, \tag{9}$$

nghĩa là vận tốc pha là hình chiếu của vận tốc tia trên hướng của vector truyền sóng.

Cần chú ý rằng vận tốc tia được rút ra từ vector Poynting chia sẻ với nó một bậc tùy ý nào đó. Tuy thế nó là một khái niệm hữu dụng, mặc dù giống như vận tốc pha, nó không có ý nghĩa vật lí để có thể kiểm tra trực tiếp được.

Nếu ***E*** và ***D*** đã biết [chẳng hạn khi ***E*** được mô tả và ***D*** được xác định từ nó bởi bài 15.1(1)], thì chiết suất n và vector truyền sóng ***s*** cũng được xác định. Ở nơi thứ nhất, bởi vì $\vec{E}_\perp$ là thành phần vector của ***E*** theo hướng của ***D***,

$$\mathbf{E}_\perp = \left(\mathbf{E}\cdot\frac{\mathbf{D}}{D}\right)\frac{\mathbf{D}}{D}, \tag{10}$$

vì thế từ (4) suy ra

$$n^2 = \frac{\mu\mathbf{D}}{\mathbf{E}_\perp} = \frac{\mu\mathbf{D}^2}{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})}. \tag{11}$$

Hơn nữa, bởi vì vector đơn vị ***s*** vuông góc với **D** và đồng phẳng với **D** và **E,** nó có thể được biểu diễn dưới dạng

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{E}-\mathbf{E}_\perp}{|\mathbf{E}-\mathbf{E}_\perp|} = \frac{\mathbf{E}-\dfrac{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})\mathbf{D}}{\mathbf{D}^2}}{\sqrt{\mathbf{E}^2-\dfrac{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})^2}{\mathbf{D}^2}}} = \frac{\mathbf{D}^2\mathbf{E}-(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})\mathbf{D}}{\sqrt{\mathbf{D}^2[\mathbf{E}^2\mathbf{D}^2-(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})^2]}}. \tag{12}$$

Theo cách tương tự với chiết suất n, chúng ta cũng có thể định nghĩa chỉ số tia hoặc chỉ số năng lượng n_r qua công thức

$$n_r = \frac{c}{\upsilon_r} \tag{13}$$

Theo (7) và (9) chúng ta có

$$n_r = n\cos\alpha. \tag{14}$$

Bây giờ chúng ta chứng tỏ rằng chỉ số tia n_r và vector đơn vị ***t*** theo hướng truyền của năng lượng được cho bởi các công thức tương tự với (11) và (12). Chúng ta có từ (14), (11) và hệ thức $\vec{E}\vec{D} = ED\cos\alpha$,

$$n_r^2 = \frac{\mu(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})}{\mathbf{E}^2}. \tag{15}$$

Vector đơn vị ***t*** vuông góc với ***E*** và đồng phẳng với ***E*** và ***D*** (có lẽ ngoại trừ dấu) phải được cho bởi công thức dẫn đến từ sự hoán đổi ***E*** và ***D*** trong (12). Vì thế

$$-\mathbf{t} = \frac{\mathbf{E}^2\mathbf{D} - (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})\mathbf{E}}{\sqrt{\mathbf{E}^2[\mathbf{E}^2\mathbf{D}^2 - (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})^2]}}. \tag{16}$$

Dấu âm ở vế trái đảm bảo rằng ***s*** và ***t*** hướng về cùng phía với ***E*** và ***D*** như trong hình 15.1.

Cả (12) và (16) sẽ rút về dạng 0/0 khi ***E*** và ***D*** trùng hướng, nghĩa là khi ***E*** cùng hướng với một trong những trục chính của tinh thể. Điều này được mong đợi bởi vì hướng của ***s*** và ***t*** không xác định ngoại trừ chúng phải vuông góc với ***E***.

Chúng ta cũng có thể biểu diễn độ lớn của vecto Poynting theo ***E*** và ***D***. Theo (8), (13) và (15), cũng nhớ rằng đối với sóng phẳng $w = 2w_e$

$$S = v_r w = \frac{c}{n_r}\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{4\pi} = \frac{c}{4\pi\sqrt{\mu}}E\sqrt{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}, \tag{17}$$

một công thức mà, trong trường hợp của môi trường đẳng hướng, dường như phù hợp với bài 1.4(8) và bài 1.4(9).

15.2.2 Công thức Fresnel cho sự truyền ánh sáng trong tinh thể

Các công thức được rút ra trong bài 15.2.1 là hệ quả của chính các phương trình Maxwell và do đó không phụ thuộc vào tính chất của môi trường. Bây giờ chúng ta sẽ kết hợp những cái này với phương trình vật liệu trong phần 15.1 (1).

Chúng ta sẽ dùng hệ trục tọa độ trùng với các trục điện môi chính. Do đó hệ thức 15.1(1) trở thành dạng đơn giản hơn 15.1(12), và thế ***D*** vào trong (4) cho ta

$$\mu\varepsilon_k E_k = n^2[E_k - s_k(\mathbf{E}\cdot\mathbf{s})], \qquad (k = x,\ y,\ z). \tag{18}$$

Phương trình (18) là ba phương trình đồng nhất tuyến tính theo E_x, E_y, E_z có thể được thõa mãn bởi các giá trị khác không của những thành phần này chỉ nếu định thức gắn với nó bằng 0. Điều này ám chỉ rằng một hệ thức như thế phải được thõa mãn bởi chiết suất n, vector $\boldsymbol{s}(s_x, s_y, s_z)$ và các hằng số điện môi chính $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$. Hệ thức này có thể được rút ra bằng cách viết (18) dưới dạng

$$E_k = \frac{n^2 s_k(\mathbf{E}\cdot\mathbf{s})}{n^2 - \mu\varepsilon_k}, \qquad (19)$$

Nhân nó với s_k và cộng ba phương trình cuối cùng này, sau đó chia biểu thức kết quả cho thừa số chung $\boldsymbol{E}.\boldsymbol{s}$, chúng ta thu được

$$\frac{s_x^2}{n^2 - \mu\varepsilon_x} + \frac{s_y^2}{n^2 - \mu\varepsilon_y} + \frac{s_z^2}{n^2 - \mu\varepsilon_z} = \frac{1}{n^2}. \qquad (20)$$

Công thức này có thể được biễu diễn dưới dạng hơi khác. Chúng ta nhân cả hai vế của (20) cho n^2 và trừ $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$. Tiếp theo chúng ta nhân biểu thức kết quả cho $-n^2$ và tìm được

$$\frac{s_x^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\mu\varepsilon_x}} + \frac{s_y^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\mu\varepsilon_y}} + \frac{s_z^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\mu\varepsilon_z}} = 0. \qquad (21)$$

Chúng ta định nghĩa ba vận tốc truyền chính bằng các công thức

$$\upsilon_x = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon_x}}, \qquad \upsilon_y = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon_y}}, \qquad \upsilon_z = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon_z}}. \qquad (22)$$

Khi biểu thức (7) được dùng cho vận tốc pha υ_p, (19) và (21) có dạng

$$E_k = \frac{\upsilon_k^2}{\upsilon_k^2 - \upsilon_p^2} s_k(\mathbf{E}\cdot\mathbf{s}), \qquad (k = x,\ y,\ z), \qquad (23)$$

$$\frac{s_x^2}{\upsilon_p^2 - \upsilon_x^2} + \frac{s_y^2}{\upsilon_p^2 - \upsilon_y^2} + \frac{s_z^2}{\upsilon_p^2 - \upsilon_z^2} = 0. \qquad (24)$$

Phương trình (20), (21) và (24) là những dạng tương đương của *phương trình Fresnel cho vecto truyền sóng*. Đây là phương trình bậc hai theo υ_p^2, có thể thấy điều này bằng cách nhân (24) với tích của các số hạng ở mẫu số. Vì thế mỗi hướng ***s*** ở đó tương ứng với hai vận tốc pha υ_p (hai giá trị $\pm\upsilon_p$ tương ứng với bất kì giá trị υ_p^2 nào được tính như một bởi vì giá trị âm hiển nhiên thuộc về hướng truyền ngược lại –***s***). Với mỗi hai giá trị υ_p, thì từ (23) có thể tìm được các tỉ số E_x:E_y:E_z; rồi sau đó các tỉ số tương ứng liên quan đến vector ***D*** có thể thu được từ bài 15.1(12). Bởi vì những tỉ số này là thực, các trường ***E*** và ***D*** là phân cực tuyến tính. Vì thế chúng ta có một kết quả quan trọng là ***cấu trúc của môi trường bất đẳng hướng cho phép hai sóng phẳng đơn sắc với hai chế độ phân cực tuyến tính khác nhau và hai vận tốc khác nhau truyền theo một hướng bất kì.*** Sau này chúng ta sẽ chứng tỏ rằng hai hướng của vecto cảm ứng điện ***D*** tương ứng với một hướng truyền cho trước ***s*** trực giao với nhau.

Bây giờ chúng ta chứng tỏ rằng cũng có một công thức tương tự cho vận tốc tia υ_r. Điều này hầu như dễ dàng được thực hiện bằng cách đầu tiên chứng tỏ rằng có một hệ thức tương tự với (4) trong đó vai trò của ***D*** và ***E*** và của ***s*** và ***t*** thay đổi cho nhau. Sẽ thuận tiện nếu đưa vào một vector $\vec{D}_\perp$ được định nghĩa như là thành phần vector của ***D*** vuông góc với ***t*** , trong mặt phẳng của ***D*** và ***t***. Nó hiển nhiên là

$$\mathbf{D}_\perp = \mathbf{D} - \mathbf{t}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{t}). \tag{25}$$

Bởi vì vecto điện cũng vuông góc với ***t*** và đồng phẳng với **D** và **t** (xem hình 15.1), $\vec{D}_\perp$ song song với ***E*** và vì vậy cũng được biểu diễn dưới dạng

$$\mathbf{D}_\perp = \left(\mathbf{D}\cdot\frac{\mathbf{E}}{E}\right)\frac{\mathbf{E}}{E} = \frac{n_r^2}{\mu}\mathbf{E}, \tag{26}$$

ở đây chúng ta đã sử dụng công thức (15). Từ (25) và (26) suy ra rằng

$$\mathbf{E} = \frac{\mu}{n_r^2}[\mathbf{D} - \mathbf{t}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{t})] = \frac{\mu}{n_r^2}\mathbf{D}_\perp. \tag{27}$$

Phương trình này tương tự với (4) và có thể thu được một cách hình thức bằng cách thay đổi vai trò của ***E*** và ***D***, n và $1/n_r$, μ và $1/\mu$ và ***s*** và –***t***. Hoàn toàn tổng quát, quy luật đối ngẫu sau có thể áp dụng cho các phương trình cơ bản:

Hãy sắp xếp các biến thành hai hàng như sau:

$$\left.\begin{array}{cccccccccccccc} \mathbf{E}, & \mathbf{D}, & \mathbf{s}, & \mathbf{t}, & c, & \mu & v_p, & n, & \varepsilon_x, & \varepsilon_y, & \varepsilon_z, & v_x, & v_y, & v_z, \\ \mathbf{D}, & \mathbf{E}, & -\mathbf{t}, & -\mathbf{s}, & \dfrac{1}{c}, & \dfrac{1}{\mu}, & \dfrac{1}{v_r}, & \dfrac{1}{n_r}, & \dfrac{1}{\varepsilon_x}, & \dfrac{1}{\varepsilon_y}, & \dfrac{1}{\varepsilon_z}, & \dfrac{1}{v_x}, & \dfrac{1}{v_y}, & \dfrac{1}{v_z}. \end{array}\right\} \tag{28}$$

Nếu bất cứ hệ thức nào đúng cho các đại lượng trong một hàng thì mỗi đại lượng được thay thế bằng các đại lượng tương ứng ở hàng còn lại ta vẫn thu được một hệ thức đúng.

Áp dụng công thức này cho phương trình Fresnel của vector truyền sóng (24) ngay lập tức chúng ta thu được phương trình tia cần thiết

$$\frac{t_x^2}{\dfrac{1}{v_r^2}-\dfrac{1}{v_x^2}}+\frac{t_y^2}{\dfrac{1}{v_r^2}-\dfrac{1}{v_y^2}}+\frac{t_z^2}{\dfrac{1}{v_r^2}-\dfrac{1}{v_z^2}}=0. \tag{29}$$

Tất nhiên, chúng ta cũng có thể biểu diễn phương trình này dưới dạng tương tự (20) và (21). Giống như (24) phương trình này lại là phương trình bậc hai và cho hai vận tốc tia khả dĩ υ_r cho mỗi hướng $t(t_x, t_y, t_z)$. Hướng tương ứng của ***D*** có thể được giải với giá trị thích hợp υ_r các phương trình đối ngẫu (23), cụ thể

$$D_k=-\frac{v_r^2}{v_k^2-v_r^2}t_k(\mathbf{D}\cdot\mathbf{t}), \qquad (k=x,\ y,\ z). \tag{30}$$

Hướng của hai vector ***E*** (như chúng ta đã thấy là trực giao với ***t***) có thể thu được bằng cách dùng bài 1.4.1(12).

Như là một quy luật chỉ một trong những vector ***s*** hoặc ***t*** được cho và do đó cần phải rút ra những hệ thức mà từ đó cái còn lại có thể được tính toán trực tiếp. Từ hình 15.1 chúng ta có

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{s}=E_\perp\tan\alpha, \qquad \mathbf{D}\cdot\mathbf{t}=-D\sin\alpha. \tag{31}$$

Nhưng từ (4), $D = n^2E_\perp/\mu$. Vì thế

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{t}=-\frac{n^2}{\mu}E_\perp\sin\alpha=-\frac{n^2}{\mu}\mathbf{E}\cdot\mathbf{s}\cos\alpha=-\frac{1}{\mu}\frac{c^2}{v_pv_r}\mathbf{E}\cdot\mathbf{s}, \tag{32}$$

ở đây hệ thức (9) và (7) đã được dùng. Thế (32) vào (30) cho ta

$$D_k=\varepsilon_kE_k=\frac{1}{\mu}\frac{c^2v_r}{v_p(v_k^2-v_r^2)}t_k(\mathbf{E}\cdot\mathbf{s}). \tag{33}$$

So sánh (33) với (23) và nhớ rằng $\mu\varepsilon_k\upsilon_k^2 = c^2$, chúng ta thu được

$$\frac{\upsilon_p s_k}{\upsilon_k^2 - \upsilon_p^2} = \frac{\upsilon_r t_k}{\upsilon_k^2 - \upsilon_r^2}. \qquad (34)$$

Giải tìm t_k

$$t_k = \frac{\upsilon_p}{\upsilon_r}\frac{\upsilon_k^2 - \upsilon_k^2}{\upsilon_r^2 - \upsilon_p^2} s_k, \qquad (35)$$

Vì thế

$$\upsilon_r t_k - \upsilon_p s_k = \upsilon_p s_k \frac{\upsilon_r^2 - \upsilon_p^2}{\upsilon_p^2 - \upsilon_k^2}. \qquad (36)$$

Bình phương và cộng ba phương trình (36) và dùng hệ thức bài 15.2(9), cụ thể $\vec{s}.\vec{t} = \upsilon_p/\upsilon_r$, chúng ta thu được

$$\upsilon_r^2 - \upsilon_p^2 = \upsilon_p^2(\upsilon_r^2 - \upsilon_p^2)^2\left[\left(\frac{s_x}{\upsilon_p^2 - \upsilon_x^2}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{\upsilon_p^2 - \upsilon_y^2}\right)^2 + \left(\frac{s_z}{\upsilon_p^2 - \upsilon_z^2}\right)^2\right]. \qquad (37)$$

Vì thế chúng ta có thể định nghĩa

$$g^2 \equiv \upsilon_p^2(\upsilon_r^2 - \upsilon_p^2) = \frac{1}{\left(\frac{s_x}{\upsilon_p^2 - \upsilon_x^2}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{\upsilon_p^2 - \upsilon_y^2}\right)^2 + \left(\frac{s_z^2}{\upsilon_p^2 - \upsilon_z^2}\right)^2}. \qquad (38)$$

Hệ thức này biểu diễn υ_r theo ***s***, bởi vì υ_p đã biết rồi theo ***s*** từ phương trình Fresnel (24). Với υ_r được xác định, do đó (35) cho vector tia đơn vị ***t*** như hàm theo ***s***. Dùng biểu thức g, (35) có thể được viết là

$$t_k = \frac{s_k}{\upsilon_p\upsilon_r}\left(\upsilon_p^2 + \frac{g^2}{\upsilon_p^2 - \upsilon_k^2}\right) \qquad (k = x, y, z). \qquad (39)$$

Bởi vì nói chung mỗi **s** ở đó tương ứng với hai vận tốc pha υ_p, nên sẽ có hai hướng tia đối với mỗi hướng truyền sóng. Tuy nhiên, có hai hướng đơn trong những tinh thể như thế (các tinh thể lưỡng trục) do sự biến mất của mẫu số trong (39), đối với mỗi hướng sẽ có tương ứng một số tia xác định; cũng có hai hướng tia đơn mà đối với chúng tương ứng có một số hướng vector truyền sóng xác định. Những trường hợp này làm nảy sinh một hiện tượng đáng quan tâm (sự khúc xạ hình nón), hiện tượng này sẽ được xem xét trong bài 15.3.4.

15.2.3 Phép dựng hình để xác định vận tốc lan truyền và hướng dao động

Nhiều kết quả có liên quan đến vận tốc pha và vận tốc tia và hướng dao động có thể được minh họa qua các phép dựng hình hình học như thế.

(a)Ellipsoid của các vector truyền sóng

Theo bài 15.1(13) các thành phần của vector **D** tại một mật độ năng lượng cho trước $w = 2w_e$ thõa mãn hệ thức

$$\frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} = C \qquad (C = 8\pi w_e = \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}). \tag{40}$$

Chúng ta hãy thay x, y, và z vào chổ của $D_x/\sqrt{C}, D_y/\sqrt{C}, D_z/\sqrt{C}$, và xem những cái này như hệ tọa độ Đề các trong không gian. Do đó

$$\frac{x^2}{\varepsilon_x} + \frac{y^2}{\varepsilon_y} + \frac{z^2}{\varepsilon_z} = 1. \tag{41}$$

Phương trình này biễu diễn một ellipsoid, các bán trục của nó bằng căn bậc hai của các hằng số điện môi chính và trùng hướng với các trục điện môi chính. Chúng ta gọi ellipsoid này là ellipsoid của vector truyền sóng một thuật ngữ thường hay được dùng hơn thuật ngữ mập mờ 'đặc tuyến quang học' (cũng được gọi là ellipsoid chiết suất, hoặc ellipsoid nghịch đảo).

Với sự hỗ trợ của ellipsoid của vector truyền sóng chúng ta có thể tìm hai vận tốc pha υ_p và hai hướng dao động **D** thuộc về một hướng dao động **s** cho trước như sau: Chúng ta vẽ một mặt phẳng đi qua gốc tọa độ vuông góc với **s**. Giao tuyến của mặt phẳng này với ellipsoid là một elip; các bán trục chính của elip này tỉ lệ với nghịch đảo $1/\upsilon_p$ của các vận tốc pha, và hướng của chúng trùng với hướng dao động tương ứng của vector **D** (Hình 15.2).

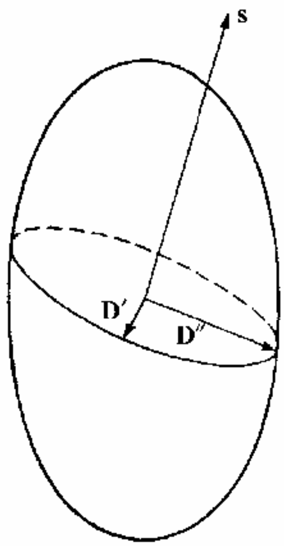

Fig. 15.2 The ellipsoid of wave normals. Construction of the directions of vibrations of the **D** vectors belonging to a wave normal **s**.

Để thiết lập kết quả này xét hai phương trình xác định elip:

$$xs_x + ys_y + zs_z = 0, \tag{42}$$

$$\frac{x^2}{\varepsilon_x} + \frac{y^2}{\varepsilon_y} + \frac{z^2}{\varepsilon_z} = 1. \tag{43}$$

Bởi vì, theo định nghĩa, trục chính của elip là các đường kính dài nhất và ngắn nhất của nó, chúng ta có thể định nghĩa chúng bằng cách tìm cực trị của

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{44}$$

Thõa mãn điều kiện (42) và (43). Chúng ta thực hiện điều này bằng phương pháp nhân tử bất định Lagrange. Chúng ta đưa và hai nhân tử $2\lambda_1$ và λ_2 và xây dựng hàm

$$F = x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda_1(xs_x + ys_y + zs_z) + \lambda_2\left(\frac{x^2}{\varepsilon_x} + \frac{y^2}{\varepsilon_y} + \frac{z^2}{\varepsilon_z} - 1\right). \tag{45}$$

Do đó bài toán của chúng ta tương đương với tìm các cực trị của F không chịu điều kiện phụ thuộc. Điều kiện cần cho cực trị F là đạo hàm của nó theo x, y, z phải biến mất, nghĩa là

$$x + \lambda_1 s_x + \frac{\lambda_2 x}{\varepsilon_x} = 0, \qquad y + \lambda_1 s_y + \frac{\lambda_2 y}{\varepsilon_y} = 0, \qquad z + \lambda_1 s_z + \frac{\lambda_2 z}{\varepsilon_z} = 0. \tag{46}$$

Nhân những phương trình này tương ứng với x, y, z và cộng, chúng ta thu được, bởi vì (420 và (43):

$$r^2 + \lambda_2 = 0. \tag{47}$$

Tiếp theo chúng ta nhân (46) với s_x, s_y, s_z và cộng, và lại dùng (42). Do đó chúng ta thu được

$$\lambda_1 + \lambda_2\left(\frac{xs_x}{\varepsilon_x} + \frac{ys_y}{\varepsilon_y} + \frac{zs_z}{\varepsilon_z}\right) = 0. \tag{48}$$

Thế λ_1 và λ_2 từ (47) và (48) vào (46) cho ta

$$x\left(1 - \frac{r^2}{\varepsilon_x}\right) + s_x r^2\left(\frac{xs_x}{\varepsilon_x} + \frac{ys_y}{\varepsilon_y} + \frac{zs_z}{\varepsilon_z}\right) = 0, \tag{49}$$

Cùng với hai phương trình tương tự. Với **s** cho trước, đây là ba phương trình đồng nhất đối với x, y, z. Chúng chỉ tương hợp chỉ nếu định thức tương ứng biến mất, một điều kiện cho phương trình đại số của r^2. Ngay lập tức chúng ta thấy rằng phương trình (49) chỉ khác với phương trình (18) ở kí hiệu. Nếu chúng ta thay x bằng $D_x/\sqrt{C}$, x/ε_x bằng $E_x/\sqrt{C}$ và r^2 bằng $\mathbf{D}^2/C=\mathbf{D}^2/\mathbf{E}.\mathbf{D}=n^2/\mu$, (49) trở thành

$$\mu D_x = n^2[E_x - s_x(\mathbf{E}\cdot\mathbf{s})], \tag{50}$$

Nó, cùng với hai phương trình tương tự giống với (18).

Vì thế chúng ta thấy rằng các nghiệm của phương trình định thức đối với $n = c/\upsilon_p$ (cái mà chúng ta đã thấy là bậc hai) tỉ lệ với chiều dài r của bán trục của phần elip vuông góc với **s**, và, hơn nữa, hai hướng khã dĩ xyz của vector **D** trùng với hướng của những trục này. Bởi vì các trục của elip vuông góc với nhau, chúng ta thu được một kết quả quan trọng là hướng dao động của hai vector **D** tương ứng với một hướng truyền **s** cho trước vuông góc với nhau. Trong những gì cho phép chúng ta sẽ kí hiệu hai hướng **D** tương ứng với một hướng truyền sóng **s** nào đó là $\vec{D}'$ và $\vec{D}''$; vì thế **s**, $\vec{D}'$, $\vec{D}''$ hình thành một bộ ba trực giao.

Trong trường hợp đặc biệt khi hướng truyền trùng với một trong các trục chính của ellipsoid, giả sử trục x, các cực trị của r, theo cấu trúc của chúng ta, bằng với độ dài của các bán trục còn lại, nghĩa là $\sqrt{\varepsilon_y}$ và $\sqrt{\varepsilon_z}$. Vì thế vận tốc pha của sóng được truyền theo hướng của trục điện môi chính x bằng $c/\sqrt{\mu\varepsilon_y}$ và $c/\sqrt{\mu\varepsilon_z}$, các vận tốc truyền chính được đưa vào một cách hình thức qua biểu thức (22). Nhưng chúng ta thấy rằng cực trị của r vẫn bằng $n/\sqrt{\mu} = c/\upsilon_p\sqrt{\mu}$. Tất nhiên, điều này vẫn đúng khi truyền theo hướng của hai trục còn lại.

(b) Ellipsoid tia

Tia phải được xem xét theo cách giống như vector truyền sóng nếu, theo quy tắc đối ngẫu (28), người ta bắt đầu từ ellipsoid tia

$$\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 = 1. \quad (51)$$

Đặc biệt, phần tâm của ellipsoid này vuông góc với hướng truyền tia **t** là một elip với các bán trục có độ dài tỉ lệ với hai vận tốc tia tương ứng υ_r , hướng theo hai hướng được phép $\vec{E}'$ và $\vec{E}''$ của vector điện. Vì thế **t**, $\vec{E}'$, $\vec{E}''$ hình thành một bộ ba vecto vuông góc nhau.

(c)Bề mặt truyền sóng và bề mặt tia

Hãy tưởng tượng một điểm O bên trong tinh thể như một gốc tọa độ hai vector được vẽ theo cùng hướng **s** và độ dài tỉ lệ với hai vận tốc pha tương ứng......................

15.3 Tính chất quang học của tinh thể một trục và hai trục

15.3.1 Phân loại tinh thể về mặt quang học

Tinh thể trong suốt thuộc ba nhóm riêng biệt liên quan đến tính chất quang học của chúng:

Nhóm I. Các tinh thể trong đó có ba hướng tinh thể học tương đương, ba hướng vuông góc lẫn nhau. Nhưng tinh thể này được gọi là hệ lập phương. Hiển nhiên các hướng tương đương trùng với trục điện môi chính và người ta có $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z (= \varepsilon)$; thì $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ và tinh thể là đẳng hướng về mặt quang học và tương đương với vật thể vô định hình.

Nhóm II. Các tinh thể không thuộc nhóm I trong đó hai hoặc nhiều hơn các hướng tinh thể tương đương có thể được chọn trong một mặt phẳng. Chúng là những tinh thể thuộc hệ ba phương, bốn phương và sáu phương, mặt phẳng chứa các hướng tương đương vuông góc với các trục bậc ba, bậc bốn và bậc sáu. Một trục điện môi chính phải trùng với hướng phân biệt này, trong khi đối với hai trục điện môi còn lại người ta có thể chọn bất cứ một cặp đường thẳng trực giao nào vuông góc với nó. Nếu hướng phân biệt được chọn là trục z thì người ta có $\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$. Những tinh thể như thế là đơn trục về mặt quang học.